

ΘΕΜΑ 1

α) Σωστό ή Λάθος, αιτιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας

- Η δύναμη \vec{F} είναι συντηρητική όταν το $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.
- Σε ευσταθές σημείο ισορροπίας της τροχιάς υλικού σημείου, η συνάρτηση δυναμικού της δύναμης, \vec{F} , που ασκείται στο υλικό σημείο παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.
- Η τροχιά υλικού σημείου A, στο οποίο επιδρά κεντρική δύναμη, βρίσκεται στο επίπεδο που διέρχεται από το ελκτικό ή απωστικό κέντρο και η κεντρική δύναμη δεν έχει συνάρτηση δυναμικού.
- Το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας υλικού σημείου, P, επί του οποίου ασκείται συνισταμένη δύναμη \vec{F} , διατηρείται σταθερό.
- Το κέντρο μάζας κλειστού συστήματος N υλικών σημείων παραμένει ακίνητο.

β) Υλικό σημείο, μάζας $m = 2\text{kg}$, κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα x υπό την επίδραση της δύναμης $F(x) = -2x + x^3$. (i) Κάτω από ποιές προϋποθέσεις υπάρχει το δυναμικό $V(x)$ της $F(x)$, $x \in [0, +\infty)$; Να βρεθεί το δυναμικό όταν $V(0) = 2$. (ii) Να γραφεί η διαφορική εξίσωση κίνησης για το υλικό σημείο και να παρασταθεί γραφικά το δυναμικό της $F(x)$ συναρτήσει του x στο διάστημα $[0, +\infty)$. (iii) Να βρεθούν και να μελετηθούν τα σημεία ισορροπίας της κίνησης του υλικού σημείου. Δεν υπάρχουν βαρυτικές δυνάμεις.

ΘΕΜΑ 2

α) Αν η ταχύτητα υλικού σημείου, P, σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι: $\vec{u} = \dot{r}\vec{r}_0 + r\dot{\theta}\vec{\theta}_0 + \dot{z}\vec{z}_0$, να βρεθεί το διάνυσμα της επιτάχυνσης, \vec{a} , σε κυλινδρικές συντεταγμένες

β) Υλικό σημείο μάζας m , κινείται με την επίδραση του βάρους $-mg\vec{z}_0$ στο επίπεδο $x + y + z = 0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $O(0,0,0)$ και δεν έχει αρχική ταχύτητα. (i) Να βρεθούν οι εξισώσεις Lagrange α' είδους. (ii) Να ολοκληρωθούν και να βρεθεί η λύση που αντιστοιχεί στις δοθείσες αρχικές συνθήκες, $g = \gamma\omega\sigma\tau\acute{o}$

ΘΕΜΑ 3

α) Έστω σύστημα N υλικών σημείων, \vec{F}_{ij} η εσωτερική δύναμη που ασκεί το υλικό σημείο j στο υλικό σημείο i και \vec{F}_i η εξωτερική η εξωτερική δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο i. Να δειχθεί ότι η

εξίσωση κίνησης του συστήματος είναι: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = M \frac{d^2 \vec{r}_s}{dt^2}$, όπου M η συνολική μάζα του συστήματος και \vec{r}_s το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του συστήματος.

β) Δίνεται η ομογενής επίπεδη επιφάνεια, ημικύκλιο ακτίνας a , του **σχήματος 1**. Να προσδιοριστούν:

(i) η μάζα της ομογενούς επιφάνειας ως συνάρτηση της πυκνότητας ρ_s και (ii) το διάνυσμα θέσης \vec{r}_s του κέντρου μάζας της επιφάνειας.

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδειχθεί ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας υλικού σημείου ισούται με το έργο της δύναμης που ασκείται στο υλικό σημείο κατά τη μετάβασή του από τη θέση 1 στη θέση 2, δηλαδή, $W = T_2 - T_1$.

β) Να υπολογιστεί το έργο W της δύναμης $\vec{F} = -y\vec{x}_0 + x\vec{y}_0$ από το σημείο (0,0) ως το σημείο (1,1)

πάνω: (i) στην ευθεία $y = x$, (ii) στην παραβολή $y = x^2$ και (iii) στον κύκλο

$x = \cos t, y = 1 + \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$. (iv) Τι παρατηρείτε για την κάθε περίπτωση